مقرر الرياضيات (3)

سنتحدث في المواضيع التالية:

1. الهندسة التحليلية
2. التكاملات المضاعفة (ثنائية,ثلاثية)
3. التحليل الاتجاهي
4. الهندسة التحليلية(النقطة,المستوي,المستقيم,السطوح,المنحنيات و السطوح الصقيلة).

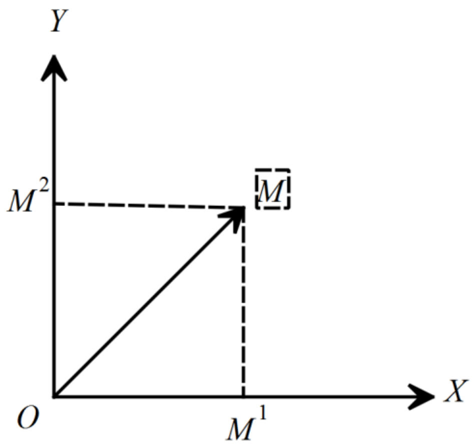
تعيين نقطة في الفراغ الثلاثي في المستوي

كل مستوي يتألف من بعدين وبالتالي أي نقطة تتعين بزوج مرتب.

1_تعيين نقطة في المستوي ديكارتيا:

لتكن oxy جملة المحاور الإحداثية المتعامد:

$$O\vec{M} = O\vec{M}_1 + O\vec{M}_2 = X\vec{\imath} + Y\vec{\jmath}$$



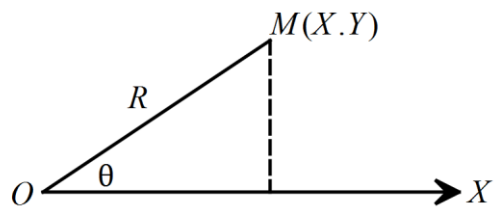
2_ تعيين نقطة في المستوي قطبيا:

تتألف جملة الإحداثيات القطبية من المبدأ **O** (القطب) ونصف المستقيم **OX** (المحور القطبي) ونفرض **r** طويلة الشعاع (المتجه) **OM** الذي يصنع الزاوية θ مع المحور القطبي عندئذ نسمي (r,θ) الإحداثيات القطبية للنقطة **M** حيث **r** نصف القطر الشعاعي حيث µ الزاوية القطبية

$$0 \le r < \infty$$

$$0 \le \theta \le 2\pi$$

العلاقة بين الإحداثيات الديكارتية والقطبية:



$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

مثال_1_: اوجد معادلة المنحني الذي معادلته في الإحداثيات القطبية :

$$r = 4a\sin\theta$$

الحل: بالانتقال للاحداثيات الديكارتية و بالاعتماد على :

$$\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\sqrt{x^2+y^2} = 4a\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$x^2+y^2 = 4ay$$

$$x^2+y^2-4ay = 0$$

$$x^2 + (y^2 - 4ay + 4a^2) = 4a^2$$
$$x^2 + (y - 2a)^2 = 4a^2$$

معادلة دائرة مركزها (0,2a) ونصف قطرها r=2a

مثال_2_:

$$m\left(-2, \frac{\pi}{3}\right) \rightarrow m(x, y)$$
$$m\left(-2, \frac{\pi}{3}\right) = m(2, \frac{4\pi}{3})$$
$$x = r\cos\theta = 2\ \cos\frac{4\pi}{3} = 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$
$$y = r\sin\theta = 2\sin\frac{4\pi}{3} = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3}$$
$$m\ (-1, -\sqrt{3})$$

مثال _3_:

$$m\left(1, \sqrt{3}\right) \rightarrow m(r, \theta)$$
$$r = \sqrt{1 + 3} = 2$$
$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{2} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$
$$m(2, \frac{\pi}{3})$$

تعيين نقطة في الفضاء

1-ديكارتياً :

M نقطة في الفضاء المنسوب لجملة المحاور الإحداثية المتعامدة **(oxyz)** و أشعة الواحدات هي $(\vec{i}.\vec{j}.\vec{k})$

$$\overrightarrow{oM} = \overrightarrow{oM_1} + \overrightarrow{oM_2} + \overrightarrow{oM_3}$$
$$= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

2_ الإحداثيات الأسطوانية لنقطة M :

تتعين النقطة **M** في الفضاء بمعرفة راقمها **Z** ومسقطها على المستوي **xoy** بالإحداثين القطبين (r,θ)

وعندئذ نقول اننا عينا **m** بالإحداثيات الأسطوانية ونرمز لها r, θ, z حيث θ الزاوية بين **ox** و **om**

$$-\infty < z < +\infty$$
$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$
$$0 \leq r < \infty$$

3_الإحداثيات الكروية:

وفيها تتعين النقطة **M** في الفضاء بواسطة طول نصف القطر الشعاعي $\overrightarrow{OM}$ أي $|\overrightarrow{OM}| = \rho$ والزاوية θ بين **om, ox**

بإعتبار $\grave{M}$ مسقط **M** على المستوي **xoy** والزاوية □ بين **om , oz** اي ان الوسطاء الثلاثة θ, φ ,□ تعين تماما الوضع **m**

ونسميها الإحداثيات الكروية .

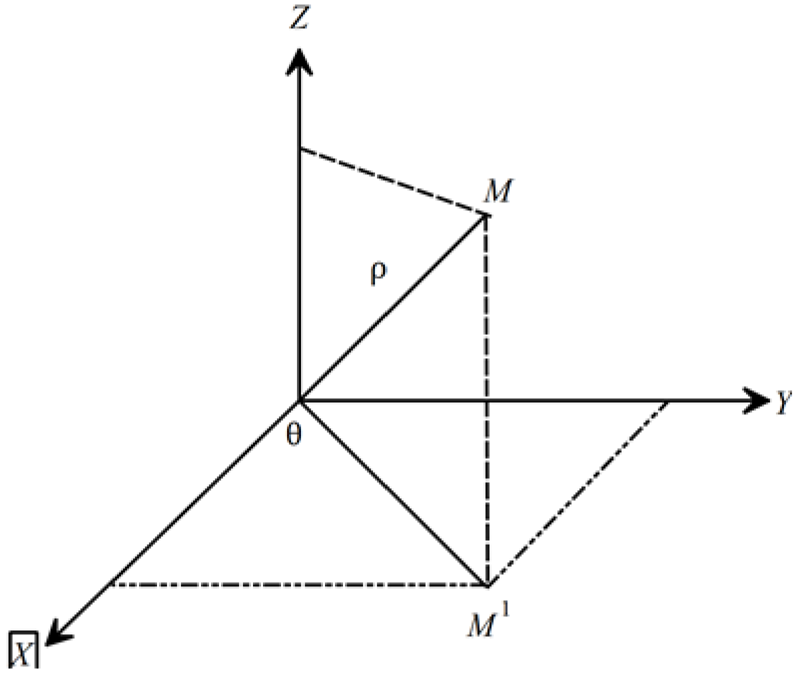
حيث : $0 \leq \theta \leq 2\pi , -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \rho < \infty$

$$|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$z = \rho \cos\varphi$$

$$OM = \rho \sin \varphi$$
$$x = \rho \cos \theta \sin \varphi$$
$$y = \rho \sin \theta \sin \varphi$$

$$\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$cos\varphi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$



مثال:أوجد الإحداثيات الأسطوانية و الكروية للنقطة $m(\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$

الحل :

$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

الإحداثيات الأسطوانية : $\left(2, \frac{\pi}{3}, 2\sqrt{3}\right)$

$$\square = \sqrt{1 + 3 + 12} = \sqrt{16} = 4$$

$$\cos \varphi = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}$$

الإحداثيات الكروية $\left(4,\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)$

المتجهات : مقادير وإتجاهات السرعة والقوة و الازاحة و تكون من الشكل :

$$\vec{v}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$$

الجداء الداخلي السلمي العددي:

هو كمية سلمية (عددية) تساوي جداء مقداري المتجهين " **cos**جيب" الزاوية بينهما .

$$\vec{v_1}.\vec{v_2} = \overrightarrow{|v_1|}.\overrightarrow{|v_2|}\cos\theta$$

أو:

$$\vec{v_1}.\vec{v_2} = p_1.p_2 + q_1.q_2 + r_1.r_2$$

نستنتج أنه يمكن تعيين الزاوية بين متجهين من العلاقة السابقة :

$$\cos\theta = \frac{\vec{v}_1.\vec{v}_2}{|\vec{v}_1|.|\vec{v}_2|}$$

$$\vec{v}_1.\vec{v}_2 = 0 \leftrightarrow \vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$$

الجداء الاتجاهي (الشعاعي):

يكتب الجداء الاتجاهي للمتجهين $\vec{v}_1,\vec{v}_2$ على النحو $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$ وهو متجه يساوي مقدارها جداء مقداري

المتجهين بجيب الزاوية θ بينهما.

$$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = \vec{v}_1 . \vec{v}_2 \ \sin \square = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = -\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$$

$$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = \vec{0} \leftrightarrow \sin\theta = 0 \leftrightarrow \vec{v}_1 \ // \ \vec{v}_2$$

الجداء المختلط لثلاث متجهات :

يكتب الجداء المختلط للمتجهات $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ على النحو $\vec{v}_1.(\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3)$

$(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ويعبر عن حجم متوازي المستطيلات.

$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix}$$

$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = (\vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_1) = (\vec{v}_3, \vec{v}_1, \vec{v}_2)$$

تعريف : المتجهين المتوازين:

نقول عن المتجهين $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ متوازيان إذا توازى المستقيمات **AB,CD** الحاملان لهما أو انطبقا ويعتبر المتجه الصفري موازيا لأي متجه.

مبرهنة:

الشرط اللازم والكافي لتكون ثلاث متجهات **a,b,c** تقع في مستوي واحد هو أن يتحقق (الجداء المختلط يساوي الصفر)

$$\vec{a}.(\vec{b} \wedge \vec{c}) = 0$$

احسب $\vec{A}.\vec{B}$, $\vec{A} \wedge \vec{B}$ إذا علمت ان :

$$\vec{A} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k} \,, \vec{B} = 3\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$$

$$\vec{A}.\vec{B} = (2)(3) + (3)(1) + (4)(-3) = -3$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -13\vec{i} + 18\vec{j} - 7\vec{k}$$

وظيفة:

- اوجد الاحداثيات الاسطوانية والكروية للنقطة
$m(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 1)$
- اوجد الزاوية الكائنة بين الشعاعين (المتجهين)
$\vec{n}_1(1, -1, 1), \vec{n}_2(2, 1, 1)$

ملاحظة: تم إضافة بعض التمارين على المحاضرة بعد موافقة الآنسة نور الأسدي